

Ejercicio 1: Una representación en coma flotante (en base 2) dedica 6 bits a la mantisa ($m = 1.m_1m_2m_3m_4m_5m_6$). La representación no usa números desnormalizados y el rango de los exponentes posibles es entre -8 y 8.

a) Número mínimo de la representación:

$$x_{\min} = (\text{mantisa mínima}) \cdot 2^{\text{exp_mínimo}} = 1.000000 \cdot 2^{-8} = 1/256 \sim 0.0039$$

Separación entre el 1 y el siguiente número máquina:

$$\text{Espaciado entre } 1.000000 \text{ y } 1.000001 = 0.000001 = 2^{-6} = 1/64 = 0.0156$$

$$\text{Error relativo de la representación: } \text{Erel} \leq \text{eps}/2 = 1/128 \sim 0.0078$$

$$\text{Máxima separación entre números máquina: se dará en los números con exponente máximo} \Rightarrow (\text{espaciado mantisa}) \cdot 2^{\text{max_exp}} = (2^{-6}) \cdot (2^8) = 4$$

b) Sea el $x=3.2$. Expresarlo como $m \cdot 2^e$ dando su exponente e y su mantisa m . Error absoluto y relativo entre el número real original y su representación máquina.

$$x = 3.2 = 1.6 \cdot 2 \quad \rightarrow \text{exponente} = 1, \text{ mantisa (decimal) } m = 1.6$$

	resto	
1.6 -->	0.6	$m = 1.100110011001 \dots$
1.2 -->	0.2	
0.4 -->	0.4	guardado con 6 "decimales" binarios: $m = 1.100110$
0.8 -->	0.8	
1.6 -->	...	y a partir de aquí se repite 1001

$$\text{El número máquina es } 2 \cdot (1 + 1/2 + 1/16 + 1/32) = 2 + 1 + 1/8 + 1/16 = 3.1875$$

$$\text{Error absoluto} = |3.2 - 3.1875| = 0.0125. \quad \text{Error relativo} = 0.0125/3.2 \sim 0.0039$$

c) Sea $a=1/256$ (un número válido en esta representación). Si la representación redondea, indicad (justificando) el resultado de las siguientes operaciones:

$$(1+a) \qquad 1+(a+a+a) \qquad (1+a+a+a+a)$$

Fijaros que $a = 1/256 = \text{mínimo número representable} = \text{eps}/4$ ($\text{eps} = 1/64$).

- $(1+a) = 1$ ($1+\text{eps}/4$ no llega a $1+\text{eps}/2$ para "saltar" al siguiente n°)
- $1+(a+a+a) = 1+\text{eps}$ ($3a=3\text{eps}/4$, $1+0.75\text{eps}$ "salta" al siguiente $n^\circ = 1+\text{eps}$)
- $(1+a+a+a+a) = 1$. Ante esta expresión el ordenador hace la primera operación $(1+a)$ y el resultado se queda en 1 como en el primer caso. Luego añade el siguiente a pero vuelve a pasar lo mismo, etc.

En este último caso sería mucho mejor hacer $1+(a+a+a+a)$, sumando primero los términos pequeños entre sí ($4a$) antes de añadirlos a la unidad, evitando en lo posible sumar números de magnitudes muy distintas.

Ejercicio 2:

- a) Dar la expresión mediante la fórmula de Newton generalizada de un polinomio $p(x)$ de grado dos tal que $p(1)=1$, $p'(1)=0$ y $p(2)=p_2$, con p_2 dado.

Se construye la tabla de diferencias divididas generalizadas con los datos dados:

x_k	$p[\bullet]$	$p[\bullet, \bullet]$	$p[\bullet, \bullet, \bullet]$
1	1	$p[1,1]=p'(1)=0$	$p[1,1,2]=p_2-1$
1	1	$p[1,2]=(p_2-1)$	
2	p_2		

Atendiendo a los datos de la tabla anterior, la expresión de Newton generalizada del polinomio pedido es:

$$p(x) = 1 + 0(x-1) + (p_2-1)(x-1)^2 = 1 + (p_2-1)(x-1)^2$$

- b) Se considera la función a trozos $s(x) = \begin{cases} a + b(x-1) + c(x-1)^2 & x \in [0,1) \\ 1 + C(x-1)^2 & x \in [1,2] \end{cases}$

Determinar qué condiciones deben verificar los parámetros a , b , c y C en la expresión anterior para que $s(x)$ sea una función spline cuadrático.

Justificar la respuesta y dar la expresión general de dicha función spline.

Para que la función $s(x)$ sea una función spline de grado 2, se debe verificar:

- $s(x)$ tienen que ser un polinomio de grado dos en cada uno de los tramos de definición, lo cual se verifica para cualesquiera valores de los parámetros.
- $s(x)$ y $s'(x)$ deben ser continuas en el intervalo $(0,2)$, para lo que basta imponer que lo sean en el punto $x=1$:

$$s(1^-) = a = 1 = s(1^+) \rightarrow a=1$$

$$s'(1^-) = b = 0 = s'(1^+) \rightarrow b=0$$

Por tanto la expresión general de la familia de splines cuadrados considerada es:

$$s(x) = \begin{cases} 1 + c(x-1)^2 & x \in [0,1) \\ 1 + C(x-1)^2 & x \in [1,2] \end{cases}$$

- c) Determinar la función spline de la familia resultante en el apartado anterior que interpola los datos de la tabla:

x_i	0	2
y_i	3	5

Imponemos que la función spline $s(x)$ del apartado anterior verifique:

$$s(0) = 1 + c = 3 \rightarrow c=2$$

$$s(2) = 1 + C = 5 \rightarrow C=4.$$

Por tanto, la función spline pedida tiene la expresión: $s(x) = \begin{cases} 1 + 2(x-1)^2 & x \in [0,1) \\ 1 + 4(x-1)^2 & x \in [1,2] \end{cases}$

Ejercicio 3: Se considera el problema de ajustar por mínimos cuadrados los puntos de la tabla:

x_i	$-\pi$	$-\pi/2$	0
y_i	2	-1	1

con una función del tipo $\Phi(x) = \frac{a + \text{sen}(x)}{b + \cos(x)}$, verificando la condición previa $\Phi'(\pi/2) = 0$.

Imponer la condición previa, linealizar el problema y resolver las ecuaciones normales correspondientes.

Nota: $\Phi'(x) = \frac{\cos(x) \cdot (b + \cos(x)) + \text{sen}(x) \cdot (a + \text{sen}(x))}{(b + \cos(x))^2}$

Imponemos la condición previa: $\Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{a + 1}{b^2} = 0 \Rightarrow a = -1; b \neq 0$

La función de ajuste queda como $\Phi(x) = \frac{-1 + \text{sen}(x)}{b + \cos(x)}$, y con ella debemos aproximar los datos dados en la tabla:

$$\Phi(x_i) \approx y_i; i = 1, 2, 3$$

$$\frac{-1 + \text{sen}(x_i)}{b + \cos(x_i)} \approx y_i; i = 1, 2, 3$$

Linealizando: $-1 + \text{sen}(x_i) \approx y_i(b + \cos(i))$

Agrupando términos: $by_i \approx y_i \cos(x_i) + 1 - \text{sen}(x_i); i = 1, 2, 3$

Obteniéndose el sistema sobredeterminado:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (b) \approx \begin{pmatrix} 2\cos(-\pi) + 1 - \text{sen}(-\pi) \\ (-1)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1 - \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \cos(0) + 1 - \text{sen}(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (b) \approx \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si llamamos: $H = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{c} = b$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, la solución del sistema anterior en el

sentido de los mínimos cuadrados (minimización de la norma $\|H \cdot \bar{c} - \bar{v}\|_2^2$ del vector residuo $(H \cdot \bar{c} - \bar{v})$) se obtiene resolviendo las ecuaciones normales: $H^T H \cdot \bar{c} = H^T \bar{v}$

Sustituyendo los valores de H y v en las ecuaciones normales:

$$(2 \quad -1 \quad 1) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (b) = (2 \quad -1 \quad 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow b = -\frac{1}{3}$$

La función de ajuste pedida es: $\Phi(x) = \frac{-1 + \text{sen}(x)}{-\frac{1}{3} + \cos(x)}$